(68)

Πρόταση 1

i) Κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. είναι και φραγμένος μ.χ.

ii) (Το αντίστροφο δεν ισχύει)

Απόδειξη πρότ. 1

i) Έστω (E,ρ) ολικά φραγμένος μ.χ. Τότε για $\varepsilon=1$, υπάρχει

$A \subseteq E$: A πεπερ. και 1-πυκνό

Θεωρώ x,y τυχόντα στοιχεία του $E \xRightarrow[\text{1-πυκνό}]{\text{A είναι}} (\exists z\in A)(\exists w\in A): \rho(x,z)<1$ κ $\rho(y,w)<1$

$\rho(x,y) \leq \rho(x,z)+\rho(z,w)+\rho(w,y) < 1+\delta(A)+1 = 2+\delta(A) \xlongequal{\text{A πεπερασ.}} M < +\infty \Longrightarrow$

$\sup\limits_{(x,y)\in E} \rho(x,y) \leq M$ άρα ο E είναι φραγμένος

ii) Έστω E απέραντο, (E,ρ) διακριτός μ.χ. άρα

$\delta(E)=1 \Rightarrow (E,\rho)$ φραγμένος μ.χ.

Έστω ότι ο E είναι ολικά φραγμένος $\Longrightarrow$ Τότε για $\varepsilon=\frac{1}{2}$ θα υπάρχει A πεπερασμένο και $\frac{1}{2}$-πυκνό.

Άρα αν x τυχόν, $x\in E \Longrightarrow (\exists y\in A): \rho(x,y)<\frac{1}{2} \Longrightarrow \rho(x,y)=0 \Longrightarrow x=y$

$\xRightarrow{y\in A} x\in A$ ΑΤΟΠΟ γιατί το A είναι πεπερασμένο ενώ το E είναι απέραντο

Πρόταση 2

Τυχόν υποσύνολο ολικά φραγμένου μ.χ. είναι ολικά φραγμένο

Πρόταση 3

Έστω (E_1,ρ_1) μ.χ. ολικά φραγμένος κ (E_2,ρ_2) με $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$.

Τότε αν f ομ. συνεχής ο (E_2,ρ_2) είναι ολικά φραγμένος

Απόδειξη πρότ. 3

Έστω $\varepsilon>0$ (ε τυχών). Επειδή $f: E_1 \xrightarrow{\text{επί}} E_2$ είναι ομοιόμορφα

συνεχής: $(\exists \delta>0)(\forall x,y \text{ εν } E_1): \rho_1(x,y)<\delta \Longrightarrow \rho_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ (*)

E_1 ολικά φραγμένος $\Longrightarrow \exists A\subseteq E_1$, A πεπερ. κ δ-πυκνό

$f(A) \lesssim A \xRightarrow{\text{A πεπερ.}} f(A)$ πεπερ. Θ.δ.ο. το $f(A)$ είναι ε-πυκνό

Έστω $y\in E_2 \xRightarrow{f \text{ επί}} (\exists x\in E_1): y=f(x) \xRightarrow{\text{A είναι δ-πυκνό εν } E_1} (\exists z\in A): \rho(x,z)<\delta$

$w=f(z)\in f(A) \xRightarrow{(*)} \rho_2(f(x),f(z))<\varepsilon \Longrightarrow \rho_2(y,w)<\varepsilon$, $w\in f(A)$

Πρόταση 4

Έστω (E,ρ) ο καρτ. μ.χ. των μ.χ. $(E_1,\rho_1),\dots,(E_k,\rho_k)$

(E,ρ) ολικά φραγμ. μ.χ. $\iff (\forall i=1,\dots,k): (E_i,\rho_i)$ ολικά φραγμ. μ.χ.

$(\Leftarrow)$ Θεωρώ $\varepsilon>0$ (ε τυχόν)

(E_1,ρ_1) ολικά φραγμ. $\Longrightarrow (\underset{\text{πεπερ.}}{\exists A_1} \subseteq E_1): A_1 \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$-πυκνό

$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$

(E_k,ρ_k) ολικά φραγμ. $\Longrightarrow (\underset{\text{πεπερ.}}{\exists A_k} \subseteq E_k): A_k \ \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$-πυκνό

$\underbrace{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k}_{A \text{ πεπερ.}} \subseteq E_1 \times E_2 \times \dots \times E_k = E$

Έστω $x=(x_1,\dots,x_k)$ τυχόν στοιχείο του E. Τότε

$x_1 \in E_1 \Longrightarrow (\exists\, a_1 \in A_1): \rho_1(a_1,x_1) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ (γιατί A_1 είναι $\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ πυκνό εν E_1)

$\circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$

$x_k \in E_k \Longrightarrow (\exists\, a_k \in A_k): \rho_k(a_k,x_k) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ (γιατί A_k είναι $\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ πυκνό εν E_k) $\Big\} \Longrightarrow$

με $a=(a_1,\dots,a_k) \in A_1 \times \dots \times A_k = A$ άρα

$\rho(x,a) = \sqrt{\rho_1^2(x_1,a_1)+\dots+\rho_k^2(x_k,a_k)} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k}+\dots+\frac{\varepsilon^2}{k}} = \varepsilon$

$(\Longrightarrow)$ Έστω (E,ρ) ολικά φραγμένος.

$a=(a_1,\dots,a_k) \xrightarrow{P_1} a_1$ $\qquad P_1 : E \xrightarrow{\text{επί}} E_1$

$a=(a_1,\dots,a_k) \xrightarrow{P_2} a_2$ $\qquad \circ \ \circ \ \circ$ $\quad$ προβολές

$\circ \ \circ \ \circ$ $\qquad \circ \ \circ \ \circ$

$a=(a_1,\dots,a_k) \xrightarrow{P_k} a_k$ $\qquad P_k : E \xrightarrow{\text{επί}} E_k$

Όταν έχει ο μεγάλος χώρος μια ιδιότητα τότε αυτή μπορεί να μεταφερθεί στους μικρούς μερικούς υποχώρους υπό τον όρο ότι μιλάμε για ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις

(70)

Πρόταση - Εφαρμογή

Ένα υποσύνολο του Ευκλείδιου μ.χ. $(\mathbb{R}^n, |\ |)$, $n\in\mathbb{N}$ είναι ολικά φραγμένο αν και μόνο αν είναι φραγμένο

Απόδειξη

Έστω S είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Ν.δ.ο. S είναι κ ολικά φραγμένο. Άρα $(\exists r>0): S \subseteq B(\vec{0}, r)$

Αρκεί ν.δ.ο. $B(\vec{0},r)$ είναι ολικά φραγμένο σύνολο. Αλλά

$$B(\vec{0},r) \subseteq B(0,r)\times\ldots\times B(0,r) = \underbrace{(-r,r)\times\ldots\times(-r,r)}_{n \text{ φορές}}$$

Αρκεί ν.δ.ο. $(-r,r)$ είναι ολικά φραγμένο.

Έστω το διάστημα (α,β), $\alpha<\beta$ κ $(\varepsilon>0$ κ $n\in\mathbb{N})$: $\frac{\beta-\alpha}{n}<\varepsilon$